Autor: Jerzy Wilk

Scenariusz
lekcji matematyki w klasie II LO

opracowany w oparciu o podręcznik i zbiór zadań z matematyki autorów M. Bryński, N. Dróbka, K. Szymański – Kształcenie w zakresie rozszerzonym

Czas trwania: jedna godzina lekcyjna
Miejsce przeprowadzenia lekcji: Zespół Szkół Ponadgimnazjalnych Liceum Ogólnokształcące w Osieku
Temat lekcji: Ciągi – podsumowanie wiadomości.
Cele lekcji:
Cele ogólne:
- Przypomnienie wiadomości o ciągach
- Wspieranie współzawodnictwa i aktywności uczniów na lekcji
- Doskonalenie sprawności rachunkowej podczas rozwiązywania równań, układów równań, przekształcania wzorów
- Zmobilizowanie młodzieży do twórczego, aktywnego myślenia
- Rozwijanie umiejętności współpracy w grupie.

Cele szczegółowe:
Uczeń potrafi:
- Zastosować w zadaniach twierdzenia i wzory dotyczące ciągów arytmetycznego i geometrycznego
- Zastosować twierdzenia o granicach ciągów
- Rozwiązać układ równań liniowych, równanie kwadratowe

Metody pracy:
Praca indywidualna, praca w grupie
Pomoce:
Kalkulatory, domino matematyczne (załącznik), zadania przygotowane przez nauczyciela, zbiór zadań autorów N. Dróbka, K. Szymański

Przebieg lekcji:

1. **Część przygotowawcza:**
   - wstępna organizacja i przygotowanie lekcji
   - nawiązanie do tematu lekcji
2. **Część podstawowa:**
   - podanie celu i tematu lekcji
   - rozwiązanie zadania

W ciągu arytmetycznym (a_n) suma wyrazów drugiego i piątego wynosi 5, zaś iloraz wyrazu szóstego przez pierwszy wynosi -2. Wyznacz ogólny wyraz tego ciągu.

a) Suma n początkowych wyrazów ciągu (an) jest o 2 mniejsza od wyrazu n-tego. Wyznacz n.

b) Wyrazy a_k, a_{k+1}, a_{k+5} tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Wyznacz k.

c) Kolejnymi początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n) są wyrazy a_2 i a_3. Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (b_n).

Przewidywane odpowiedzi uczniów:

Zbudowanie układu równań:

$$\begin{cases} a_2 + a_5 = 5 \\ \dfrac{a_6}{a_1} = -2 \end{cases} \quad \text{gdzie} \quad a_2 = a_1 + r,\ a_5 = a_1 + 4r,\ a_6 = a_1 + 5r$$

Stąd

$$\begin{cases} 2a_1 + 5r = 5 \\ a_1 + 5r = -2a_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -5 \\ r = 3 \end{cases}$$

Ponieważ $a_n = a_1 + (n-1)r,$ więc $a_n = 3n - 8.$

ad. a)

Zapisanie równania $S_n + 2 = a_n$, gdzie $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,\ a_n = 3n - 8.$

Stąd $\dfrac{-5 + 3n - 8}{2} \cdot n + 2 = 3n - 8.$

Otrzymanie wyników $n = \frac{4}{3}$ lub $n = 5$.

Udzielenie odpowiedzi $n = 5$.

ad. b)

Skorzystanie z zależności $(a_{k+1})^2 = a_k \cdot a_{k+5}$,

gdzie $a_k = 3k - 8$, $a_{k+1} = 3k - 5$, $a_{k+5} = 3k + 7$.

Uzyskanie równania $(3k - 5)^2 = (3k - 8)(3k + 7)$.

Stąd $k = 3$.

ad. c)

Zapisanie

$a_2 = -2 = b_1$
$a_3 = 1 = b_2$

więc $q = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{2}$.

Spełniony jest warunek $|q| < 1$, więc można skorzystać ze wzoru $S = \frac{b_1}{1-q}$

$$S = \frac{-2}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}.$$

3. Praca w grupach (ok. 15 min)

Nauczyciel dzieli klasę na grupy 6-8 osobowe. Każda z grup otrzymuje zestaw zadań (załącznik) znajdujący się na 7 wyciętych paskach papieru. Grupy powinny jak najszybciej ułożyć paski na kształt prostokąta, tak jak w grze „Domino” (schemat podany w załączniku). Dla utrudnienia dodany został jeden zestaw, który nie pasuje do pozostałych sześciu.
W czasie pracy można używać kalkulatorów.

4. Podsumowanie

Nauczyciel dziękuje klasie za uczestnictwo w lekcji, ocenia aktywność, nagradza grupę, która pierwsza uporała się z „Dominem” (jeśli nie w całości, to w jak największej części).
Zadanie domowe polegać ma na rozwiązaniu zestawów zadań używanych na lekcji (każdy z uczniów otrzymuje kserokopię załącznika) oraz na rozwiązaniu zadań 3.110/str. 46 i 3.133/str. 50 ze zbioru zadań do klasy II.

Opis osiągnięć ucznia:

Uczeń zna i rozumie

- definicje ciągów arytmetycznego i geometrycznego,
- wzory na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów tego ciągu,
- określenie ciągu geometrycznego nieskończonego i jego sumy.

Uczeń potrafi

- zastosować znany wzór do rozwiązania zadania,
- przekształcić wzór, układ równań do potrzebnej postaci,
- rozwiązać równanie liniowe i kwadratowe.

Uczeń podaje opis matematyczny zadania w postaci zapisu symbolicznego, wykazuje umiejętność wykorzystania wyników w innych sytuacjach (ułożenie domina), współpracuje w grupie.

Uwagi o lekcji:

- Jest to druga lekcja związana z powtórzeniem wiadomości o ciągach. Pierwsza dotyczyła wyznaczania ciągów z definicji, badania ich monotoniczności i obliczania granic.
- Podczas realizacji gry w „Domino" zabrakło najszybszej grupie ok. 5 min na dokończenie całego prostokąta. Przyznawałem po 2 pkt. każdej z grup za prawidłowe zestawienie zadań podczas podsumowania lekcji. Na zakończenie każdą z grup poinformowałem o ilości zdobytych punktów, a klasa oklaskami gratulowała wyczytanej grupie.
- Na sprawdzian obejmujący ciągi zaproponowałem kilka spośród typów zadań wykorzystywanych w grze „Domino".

Załączniki

W ciągu arytmetycznym $a_2=3$ i $a_4=7$. **A=a_1, B=r**	**A**=$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+3}{n^2-6n+1}$ **B**=$\lim_{n\to\infty}\frac{An+3}{4-2n}$
W ciągu geometrycznym $S_4=0$ i $a_2=-2$. **A=a_1, B=q**	Współrzędne wierzchołka paraboli $y=x^2-4x+5$ są kolejnymi początkowymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n). **A=a_1, B=a_3**
Dany jest ciąg $a_n=2n-3$. Wyrazy a_2 i a_3 są kolejnymi początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego (b_n). **A=b_1, B=q**	W ciągu arytmetycznym (a_n) $S_5=10$ i $a_4=4$. **A=a_2, B=r**
W ciągu geometrycznym nieskończonym (a_n) $a_2=2$ i $a_3=1$. **A=**$\frac{1}{q}$, **B=S**	**A**=$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n^2+5}$ **B**=$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2-3n+1}}{n+1}$
Dany jest ciąg arytmetyczny *(-6, a, b, c, d, 4)*. A=a, B=b	W ciągu geometrycznym (a_n) $a_1+a_2+a_3=-3$ i $q=-2$. **A=a_2, B=a_4**
W ciągu geometrycznym (a_n) $a_4=4$ i q=2. **A=a_2, B=a_3**	W ciągu arytmetycznym (a_n) $a_1=5$ i r=2 W ciągu arytmetycznym (b_n) $b_2=12$ i $b_3=8$ **A=b_6, B=**$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$

W ciągu geometrycznym $b_n = 2^{n-3}$ wyrazy b_3 i b_4 są kolejnymi początkowymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n). **A=r, B=a_6**	W ciągu Fibonacciego $\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$ **A=F_4, B=F_6-F_3**

Rozwiązane zadania należy ułożyć w kształcie prostokąta